

## Γραμμική Άλγεβρα 1 - Τεστ Νο 1

ΔΙΑΡΚΕΙΑ 90 Λεπτά

Στοιχειοθεσία: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

### Θέμα 1 (10 Μόρια)

Να βρεθούν όλοι οι  $2 \times 2$  πίνακες  $B$  οι οποίοι αντιμετατίθενται με τον πίνακα  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

### Θέμα 2 (20 Μόρια)

- (i) (5 Μόρια) Αν  $A, B$  είναι δύο τετραγωνικοί πίνακες μεγέθους  $n \times n$ , να δοθεί ο ορισμός του πίνακα γινομένου  $C = A \cdot B$ .
- (ii) (15 Μόρια) Έστω  $A$  και  $B$  δύο τετραγωνικοί πίνακες των οποίων τα στοιχεία είναι μη αρνητικά και το άθροισμα των στοιχείων κάθε γραμμής τους ισούται με ένα. Ναδειχθεί ότι τα στοιχεία του γινομένου πληρούν τις ίδιες ιδιότητες.

### Θέμα 3 (25 Μόρια)

Έστω  $A$  ένας τετραγωνικός πίνακας μεγέθους  $n \times n$  τέτοιος ώστε

$$A^3 - 3A^2 + 3A - 2I_n = 0$$

- (i) (10 Μόρια) Ναδειχθεί ότι ο  $A$  είναι αντιστρέψιμος πίνακας και να βρεθεί ο αντίστροφός του.
- (ii) (15 Μόρια) Ναδειχθεί ότι ο πίνακας  $A - \lambda I_n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  είναι αντιστρέψιμος για κάθε  $\lambda \neq 2$ .

### Θέμα 4 (30 Μόρια)

- (i) (5 Μόρια) Αν  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  να υπολογιστεί ο πίνακας  $A^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

- (ii) (15 Μόρια) Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ και } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}.$$

Υπολογίστε τις παραστάσεις:

- (a)  $A^3 + B^3$ , και  
(b)  $A^{2023} + B^{2023}$ .

- (iii) (10 Μόρια) Αν  $A$  και  $B$  είναι τετραγωνικοί πίνακες ώστε  $A \cdot B = B \cdot A$  και  $A^2 = 0$ , ναδειχθεί ότι ο πίνακας  $K = A + B$  ικανοποιεί τη σχέση

$$K^{n+1} = B^n(B + (n+1)A), \forall n \in \mathbb{N}.$$

### Θέμα 5 (15 Μόρια)

Έστω τυχαίος τετραγωνικός πίνακας  $A$ . Ναδειχθεί ότι ο πίνακας  $A + {}^tA$  είναι συμμετρικός και ο πίνακας  $A - {}^tA$  είναι αντισυμμετρικός. Έπειτα ναδειχθεί ότι ο πίνακας  $A$  γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**